MAT-4171-2
Modélisation algébrique et graphique en contexte fondamental 1
Mathématique, 2e cycle du secondaire

Le discriminant

céapo
CENTRE D'ÉDUCATION DES ADULTES
Portages-de-l'Outaouais
Août 2017

1. Qu'est-ce que le « discriminant »

Rappel

La formule quadratique permet de résoudre une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Formule quadratique : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

La résolution d'une équation du second degré permet de trouver les zéros de la fonction (ou racines), c'est-à-dire, le ou les endroits où la parabole coupe l'axe des « x ».

Lors de la résolution de la résolution, il y a **trois possibilités de solutions** :

1. La parabole coupe l'axe des « x » à **deux reprises**;
2. La parabole coupe l'axe des « x » à un **seul endroit**; cette intersection correspond au sommet de la parabole;
3. La parabole ne coupe pas l'axe des « x »; il n'y a donc **pas de solution**.

Le discriminant

On appelle « discriminant » du trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ l'expression qui se trouve sous le radical dans la formule quadratique :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\boldsymbol{b^2 - 4ac}}}{2a}$$

Le discriminant est donc : $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$

On utilise le symbole suivant pour identifier le discriminant : Δ

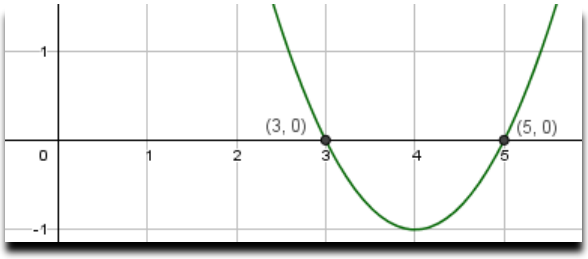
$$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$$

2. Le discriminant et le nombre de solutions

Voici le lien qui existe entre le « discriminant » et le nombre de solutions (nombre de zéros) d'une fonction quadratique de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Le discriminant est ***positif*** $\Delta > 0$	$\boldsymbol{b^2 - 4ac} > 0$	La fonction possède **deux solutions distinctes** (ou deux zéros distincts).

Exemple : $f(x) = x^2 - 8x + 15$



$a = 1; b = -8; c = 15$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(15) = 4$

$\boldsymbol{Donc, \Delta > 0, il\ y\ a\ deux\ solutions.}$

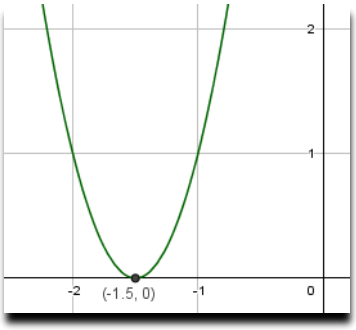
Les deux solutions sont:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{8+\sqrt{4}}{2} = 5\ ;\ x_2 = \frac{8-\sqrt{4}}{2} = 3}$**w**

2. Le discriminant est ***nul*** $\Delta = 0$	$\boldsymbol{b^2 - 4ac} = 0$	La fonction possède **une seule solution** (ou un seul zéro).

Exemple : $f(x) = 4x^2 + 12x + 9$



$a = 4; b = 12; c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(4)(9) = 0$

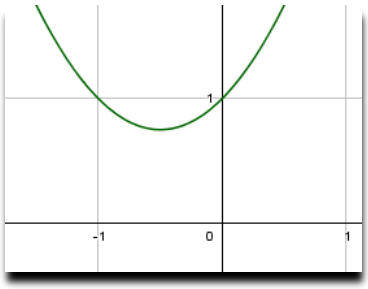
$\boldsymbol{Donc, \Delta = 0, il\ y\ a\ une\ seule\ solution.}$

La solution est :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2}$$

3. Le discriminant est ***négatif*** $\Delta < 0$	$\boldsymbol{b^2 - 4ac} < 0$	La fonction ne possède **aucune solution** (ou aucun zéro).

Exemple : $f(x) = x^2 + x + 1$



$a = 1; b = 1; c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$

$\boldsymbol{Donc, \Delta < 0, il\ n'y\ a\ aucune\ solution.}$

La parabole ne coupe pas l'axe des « x ».

Exercice

http://mathstournesac.free.fr

Pour chacune des équations suivantes :

1. Trouvez le discriminant;
2. Trouvez, s'il y a lieu, les zéros.

1. $-x^2 + 2x - 1 = 0$
2. $2x^2 - 5x + 2 = 0$
3. $t^2 + t - 1 = 0$
4. $2x - x^2 - 2 = 0$
5. $3x^2 + x + 1/16 = 0$
6. $0,25x^2 + 0,75x + 0,5 = 0$
7. $x^2 = 4x + 1$
8. $(x + 1)^2 - 2 = 2x^2$

Vos solutions

Vos solutions (suite)

Corrigé de l'exercice

1. $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 4 - 4 = 0.$

   L'équation admet une unique solution $x_0 = \dfrac{-2}{2 \times (-1)} = \dfrac{-2}{-2} = 1.$

   $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$

2. $\Delta = 9,$ $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}; 2\right\}}$

3. $\Delta = 5,$ $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}}$

4. $\Delta = -4,$ $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

5. $\Delta = \dfrac{1}{4},$ $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{12}; -\dfrac{1}{4}\right\}}$

6. *Il est plus facile de manipuler des fractions que des chiffres à virgule...*

$$0,25x^2 + 0,75x + 0,5 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

   $\Delta = 1,$ $\boxed{\mathcal{S} = \{-2; -1\}}$

7. $x^2 = 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$

   $\Delta = 20,$ $\boxed{\mathcal{S} = \left\{2 + \sqrt{5}; 2 - \sqrt{5}\right\}}$

8. $(x+1)^2 - 2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$

   $\Delta = 0,$ $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$